ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Σχολικό Βιβλίο σελ. 111

Α2.

Σχολικό Βιβλίο σελ. 104

Α3.

Σχολικό Βιβλίο σελ. 128

Α4.

α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει $D_{goh} = \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} = \begin{cases} x \in (0, \infty) \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} = (0, \infty)$.

Οπότε η συνάρτηση της σύνθεσης είναι

$$f(x) = goh(x) = \frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}} = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x},\ x>0.$$

B2.

i) Για $x > 0$ γνωρίζουμε πως η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή συνάρτηση, οπότε υπολογίζουμε την παράγωγό της:

$$f'(x) = \frac{-2\cdot x\cdot x-(4-x^2)}{x^2} = \frac{-2\cdot x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2}, \ x>0.$$

Παρατηρούμε πως για κάθε x>0 ισχύει $-x^2 - 4 < 0$ και $x^2 > 0$ άρα η $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ii) Ισχύει πως $0 < e < \pi \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \xLeftrightarrow{4-e^2<0\,,\pi>0} \frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$

άρα αποδείχθηκε.

B3.

Ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} (4 - x^2) = 4 > 0$$

Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 0 (δηλαδή τον άξονα y΄y).

Ψάχνουμε πλάγιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} (-1) = -1$$

Άρα $\lambda = -1$

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0,$$

άρα $\beta = 0$.

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -x$ στο $+\infty$.

Ασύμπτωτη στο $-\infty$ δεν υπάρχει καθώς δεν ορίζεται η f για $x < 0$.

B4.

Ισχύει πως για κάθε $x>0$ ότι:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

άρα $-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Υπολογίζουμε τα παρακάτω:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Επομένως $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = 0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)}\right) = 0$

Θέμα Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+ax)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$[x+\frac{ax^2}{2}]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9a}{2}-2-\frac{4a}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$2+9a-4a = 2 \Leftrightarrow 5a = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 0$$

Γ2.

i. Από τη συνέχεια ισχύει της $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, x<1 \\ \frac{1}{x}\,, x\geq 1 \end{cases}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2-3x+3) = 1$$

$$f(1) = 1$$

Οπότε $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1$

Άρα f συνεχής στο $x_0 = 1$.

Εξετάζω αν είναι παραγωγίσιμη στο 1:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} =$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$$

Οπότε f παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$ άρα ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

ii. $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow\leq$
$$y = -x + 2$$

Άρα ε: $y = -x + 2$

Η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(1)$$

$$\varepsilon\varphi\omega = -1$$

και καθώς $0^o \leq \omega \leq 180^o$ άρα ω=135°.

Γ3.

i.

Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x - 3 < 0$ για $x < 1$.

Η f παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για $x \geq 1$

Η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και f΄(x) <0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο ℝ άρα η f «1-1» στο ℝ.

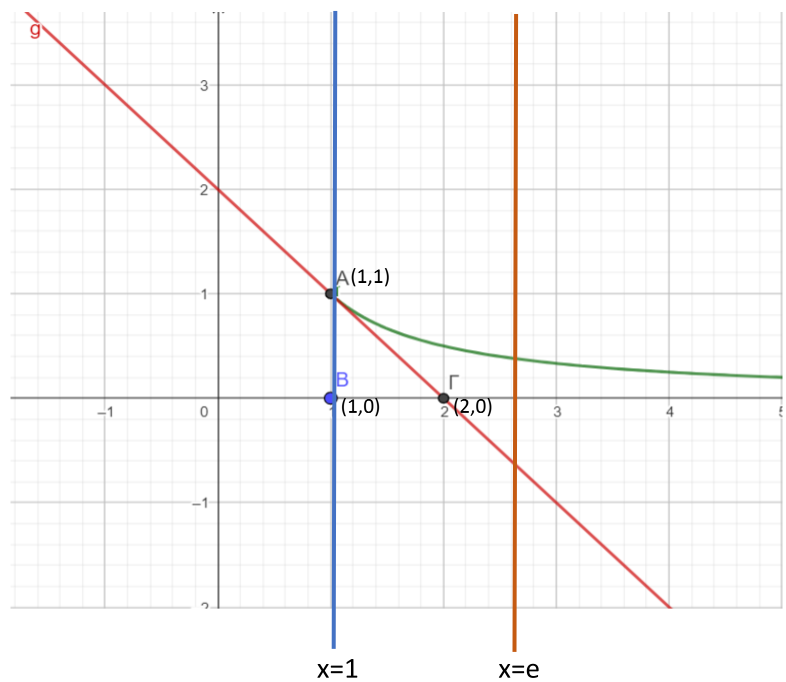
ii. Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο ℝ με
$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = (0. +\infty)$ εφόσον :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\chi} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 3x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Γ4.

Η (ε): $y = -x + 2$ τέμνει τον $x'x$ στο Γ(2,0).

$$E = \int_1^e |f(x)|\,dx - (AB\Gamma)$$
$$= \int_1^e \left|\frac{1}{x}\right| dx - \frac{1}{2}\cdot(B\Gamma)\cdot(AB) \overset{x>0}{=} \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = [\ln x]_1^e - \frac{1}{2}$$
$$= \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = l$

$(x-1)g(x) + 2x = f(x)$, για x κοντά στο 1

άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}[(x-1)g(x) + 2x] \Leftrightarrow -1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0,2) με

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}\cdot(-1) + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+2-x}{(2-x)\cdot x^2} = \frac{-x^2-x+2}{(2-x)\cdot x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ απορρίπτεται}$$

$$(2-x)\cdot x^2 > 0 \text{ στο } (0,2) \text{ άρα}$$

x	0	1	2
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	↗	↘	

Η f γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0,1]$

Η f γνησίωςωφθίνουσα στο $A_2 = [1,2)$

$$f(A_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 2] \text{ εφόσον :}$$

- $f(1) = 2$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

$$f(A_2) = (\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)] = (-\infty, 2] \text{ εφόσον :}$$

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$,

  θέτω $2 - x = u$ άρα $u_0 = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0$
- $\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x} + 3\right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Παρατηρούμε πως:

το $0 \in f(A_1) = (-\infty,2]$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1 = (0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$
η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 άρα το x_1 είναι μοναδικό στο A_1.

το $0 \in f(A_2) = (-\infty,2]$ άρα υπάρχει $x_2 \in A_2 = [1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$
η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 άρα το x_2 είναι μοναδικό στο A_2.

το $f(1) = 2 \neq 0$ άρα $x_1 < 1 < x_2$.

Επίσης έστω $x_1<\frac{1}{3}$ και αφού η f γν. αύξουσα στο (0,1]

$$f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln\left(\frac{5}{3}\right) \text{ ισχύει αφού } \frac{5}{3} > 1 \text{ και } \ln x > 0 \text{ στο } (1,+\infty).$$

Δ3.

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈(0,1) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$$

η f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$ αφού $x_1 < \frac{1}{3}$ από Δ2 υποερώτημα,

η f παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-x^2-x+2}{(2-x)x^2}.$$

Επομένως από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1, \frac{1}{3}) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1}.$$

Από Δ1 $f'(x) = -\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,2)$ η f΄ συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και βρίσκουμε:

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2}\cdot(-1) - \frac{1}{x^4}\cdot 2x = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ στο } (0,2).$$

Άρα η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα επομένως υπάρχει μία το πολύ ρίζα στο (0,2).

Εν κατακλείδι υπάρχει μοναδικό ξ∈(0,1) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}.$$

Δ4.

i) Αφού οι F,G παράγουσες της f στο (0,2) θα υπάρχει $c \in R$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = G(x) + c, x \in (0,2), \text{αφού } x_1, x_2 \in (0,2)$$

Για $x = x_1 : F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow 0 = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Για $x = x_2 : F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$

Άρα

$F(x_2) = c = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0.$

ii)

Θεωρούμε

$$H(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x, x \in (0,2)$$

από Δ4i) $F(x) = G(x) + c$, όπου $c = F(x_2) = -G(x_1)$

- η H συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, αφού οι F, G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$ άρα παραγωγίσιμες και συνεχείς.
- $H(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_2 - x_1 + 2x_1 = x_2G(x_1) - x_2 + x_1 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2$
- $H(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) - x_1 + x_2 = -x_1G(x_1) - x_1 + x_2 = -(x_1G(x_1) + x_1 - x_2)$

  Η G παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $G'(x) = f(x) > 0$ στο (x_1, x_2)
  αφού

  $$x_1 < x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow 0 < f(x)$$
  $$1 < x < x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

  Άρα $f(x) > 0$ στο (x_1, x_2)

Οπότε η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ και

$$x_1 < x_2 \overset{G\uparrow}{\Leftrightarrow} G(x_1) < G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1) < 0$$

Άρα $H(x_1) = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$

αφού $x_2 > 0$, $G(x_1) < 0 \Leftrightarrow x_2G(x_1) < 0$ και $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Ακόμη

$H(x_2) = -x_1G(x_1) + x_2 - x_1 > 0$

αφού $x_1 > 0 \Leftrightarrow -x_1 < 0$, $G(x_1) < 0 \Leftrightarrow -x_1 G(x_1) > 0$

και $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$

Άρα $H(x_1)H(x_2) < 0$, από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$,

τέτοια ώστε $H(x_0) = 0$

Επίσης:

Η παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$$H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = f(x)(x_1 + x_2) + 2 > 0 , x \in (x_1, x_2)$$

αφού $x_1, x_2 \in (0,2)$ άρα $x_1, x_2 > 0$ και $f(x) > 0$ στο (x_1, x_2)

και η H(x) γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$H(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1 F(x_0) + x_2 G(x_0) = x_1 + x_2 - 2x_0 .$$