ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΕΑ (9)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 155
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216
Α4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $D_f = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και $h(x) \neq 0$ άρα

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$$

$$\sqrt{x}^2 - 1 \neq 0$$

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Άρα, $D_f = (1, +\infty)$ και

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2 - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Επομένως, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D_f = (1, +\infty)$.

Όμοια $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ άρα $D_r = [1, +\infty)$ με τύπο

$$r(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

Επομένως, $r(x) = x - \frac{1}{x}$ με $D_r = [1, +\infty)$.

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα f "1-1" οπότε αντιστρέφεται

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{x + 1}{x - 1} \ , \qquad x > 1 \text{ άρα } y > 0$$

$$y(x - 1) = x + 1$$

$$yx - x = 1 + y$$

$$x(y - 1) = 1 + y \qquad y \neq 1$$

$$x = \frac{y + 1}{y - 1}$$

Είναι x>1 οπότε

$$\frac{y + 1}{y - 1} > 1$$

$$\frac{y + 1}{y - 1} - 1 > 0$$

$$\frac{y + 1 - y + 1}{y - 1} > 0$$

$$y > 1$$

Άρα,

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 1} \text{ για } x > 1$$

B3.

Η συνάρτηση r(χ) δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$. Ψάχνουμε πλάγιες ή οριζόντιες στο $+\infty$.

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$$

Άρα έχουμε πλάγια ασύμπτωτη την $y = x \ \ \sigma\tau o + \infty$.

B4. Η σύνθεση $f_o^{-1}f$ ορίζεται όταν $\chi \in D_f$, άρα χ>1 και

$$f(\chi) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \frac{\chi+1}{\chi-1} > 1 \overset{\chi>1}{\Longleftrightarrow} \frac{\chi+1-\chi+1}{\chi-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\chi-1} > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$$

$$(f^{-1}(f(x))^2 = 1 + 4(x - \frac{1}{x})$$

$$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \qquad x > 1$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4$$

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$x^2(x-4) - (x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^2-1) = 0$$

$\mathrm{x} = 4$ δεκτή ή $x = 1\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\tau\alpha\iota$

ή $x = -1\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\tau\alpha\iota$

$$(f^{-1}(f(x))^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \ \ \gamma\iota\alpha\ \chi = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Εφόσον η f συνεχής στο $D_f = [0\,,+\infty\,]$, τότε συνεχής και στο x = 2 επομένως

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$=f(2)

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = -4 + 4 + e^{\lambda} = e^{\lambda}$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda\,) = -4 + 8 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$

Δηλαδή $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow e^{\lambda} = 1 + \lambda \;\Leftrightarrow e^{\lambda} - \lambda - 1 = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1\,,\,\chi \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα εκθετικής με πολυωνυμική .

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow e^x = 1 \;\Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) > \;0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \;x > 0$$

Άρα g γν.αύξουσα στο [0,+∞)

$$g'(x) < \;0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow \;x < 0$$

Άρα g γν.φθίνουσα στο (-∞ ,0]

Οπότε η g έχει ελάχιστο για χ=0 το g(0)=0

Ισχύει ότι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0 . Οπότε λ = 0.

Γ2.

Για $x \in [\,0\,,2\,)$

$f\;(x) = -2x + 5$ παραγωγίσιμη με

$f'(x) = -2 < 0$,0<x<2 άρα f γν.φθίνουσα στο [0,2)

Για $\chi \in [2, +\infty)$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$ παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2) < 0\;\,,x > 2$$

άρα f γν.φθίνουσα στο [2,+∞)

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0\,,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0= 0 το f (0) = 5.

Γ3.

i. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{\mathrm{x}-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{\mathrm{x}-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{\mathrm{x}-2}\neq\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{\mathrm{x}-2}$$

Άρα f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,3)

Οπότε δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [0,3] .

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ(0,5) ,Ε(3,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης
$\lambda_{Ε\Delta}=\frac{0-5}{3-0}=-\frac{5}{3}$

αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ξ∈ $(0,3)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi)=-\frac{5}{3}$

Για $x\in[0,2]$: $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Rightarrow -2=-\frac{5}{3}$, *άτοπο*

Για $x\in[2,3]$: $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Rightarrow -2\xi+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi=-\frac{17}{3}\Leftrightarrow \xi=\frac{17}{6}$, δεκτή

$2<\frac{17}{6}<3$

άρα υπάρχει ξ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της f να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε .

Γ4.

το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (2,y) ,τη χρονική στιγμή που συναντά τη C_f΄ έχει συντεταγμένες (2,f(2)) ή (2,1)

y’(t)=0,5

ΟΒ=$\sqrt{5}$ από πυθαγόρειο στο ορθ.τριγ ΟΑΒ

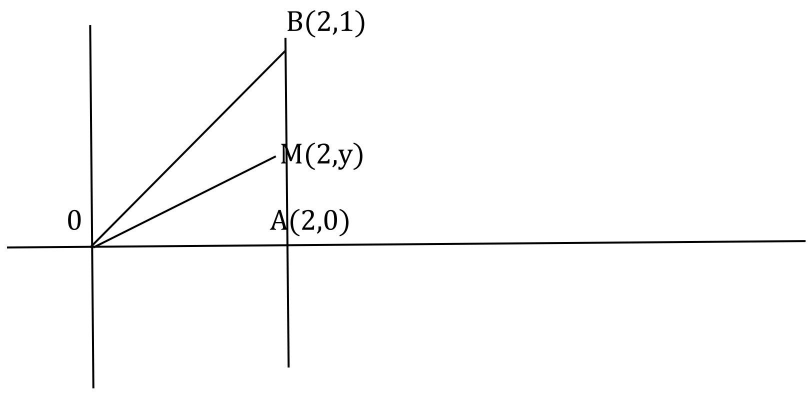
συνω(t_0)=$\frac{OA}{0B}$=$\frac{2}{\sqrt{5}}$

εφω(t)= $\frac{y(t)}{2}$

εφω(t)=$\frac{y(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$

$\gamma\iota\alpha\ t = t_0 \quad έ\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \frac{\sqrt{5}^2}{4}\omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2} \Rightarrow \frac{5}{4}\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{5} rad/s$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγ. συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-lnx-ax}{x^2}=\frac{1+ax-lnx-ax}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$$

Επομένως, $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$,x>0

- $x^2>0, για\ κάθε\ x\in(0,+\infty)$
- Για $x>e\ \Rightarrow lnx>lne\ \Rightarrow lnx>1\ \Rightarrow 1-lnx<0$
- για $0<x<e: lnx<lne\ \Rightarrow lnx<1\ \Rightarrow 1-lnx>0$

x	0	e +∞
f’	+	-
f	↗	↘

Η f είναι συνεχής στο (0,e] και γνησίως αύξουσα στο (0,e] άρα

$$f\big((0,e]\big)=(\lim_{x\to0^+}f(x),f(e)]$$

Η f είναι συνεχής στο [e,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞)

Ισχύει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=e$.

$$f(e)=\frac{lne+ae}{e}=\frac{1+ae}{e}$$

Από δεδομένα,

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1+ae}{e}=\frac{e+1}{e}\Leftrightarrow a=1$$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και γνησίως αύξουσα με

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=2\left(-ln2+\frac{1}{2}\right)=1-2ln2=ln\frac{e}{4}<0$$

και

$$f(1) = \frac{ln1 + 1}{1} = 1 > 0$$

Από Θ. Bolzano ισχύει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ το x_0 είναι μοναδικό.

f([e,+∞))=(1,1+$\frac{1}{e}$]

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{\ln x}{x} + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{dlh}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$0 \notin (1, 1 + \frac{1}{e}]$ άρα δεν υπαρχει ρίζα στο $[e, +\infty)$

Δ3.

i.

- Για $x \in [\mathrm{e}, +\infty)$ η $f(x) = f(4)$ έχει λύση το $x_2 = 4$ η οποία είναι μοναδική καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞).
- Για $x \in (0, e]$ ισχύει ότι
$$f(4) = \frac{ln4 + 4}{4} = \frac{ln2^2 + 4}{4} = \frac{2ln2 + 4}{4} = \frac{ln2 + 2}{2} = f(2)$$

Άρα $f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ η λύση $x_1 = 2$ είναι μοναδική.

Οπότε η $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς 2 λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

ii) Για κάθε $x > 0$,

$$2^x \leq x^2 \Rightarrow ln2^x \leq lnx^2 \Rightarrow xln2 \leq 2lnx \Rightarrow \frac{xln2}{2x} \leq \frac{2lnx}{2x} \Rightarrow \frac{ln2}{2} \leq \frac{lnx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ln2}{2} + 1 \leq \frac{lnx}{x} + 1 \Longrightarrow f(2) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \geq f(2)$$

Καθώς, $f(x) = \frac{lnx+x}{x} = \frac{lnx}{x} + 1$ και $f(2) = \frac{ln2}{2} + 1$

Για $x\epsilon(0, e]$, $f(x) \geq f(2) \Longrightarrow \chi \geq 2$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $x \in [2, e]$

Για $x \in [e, +\infty)$, $f(x) \geq f(2) \Longrightarrow f(x) \geq f(4) \Longrightarrow x \leq 4$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε $x \in [e, 4]$.

Οπότε συμπεραίνουμε γενικά ότι $x \in [2,4]$

Δ4.

$$E=\int_{-ln2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-ln2}^{0}|f(e^x)\cdot(f(e^x))'|dx$$

Για $x\in[-ln2,0]$ είναι

$$\frac{1-x}{e^x}>0\ \ άρα\ \left(f(e^x)\right)'>0$$

άρα $E=\int_{-ln2}^{0}|f(e^x)|\cdot(f(e^x))'dx$

θέτω $f(e^x)=u$

$\left(f(e^x)\right)'dx=du$

για x = 0 : $u_1=f(e^0)=f(1)=1$

για x = -ln2 : $u_2=f(e^{-ln2})=1-ln4$

άρα

$$\int_{1-ln4}^{1}|u|du=$$

$$-\int_{1-\ln 4}^{0}udu+\int_{0}^{1}udu=-\left[\frac{u^2}{2}\right]_{1-\ln 4}^{0}+\left[\frac{u^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{(1-\ln 4)^2}{2}+\frac{1}{2}\ \text{τ.μ}$$

<u>Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών ΟιδαΝικώ</u>